

**В. С. ОВЕРКО**, ст. науч. сотрудник, ДонНУ, Донецк;  
**М. В. БЕСКРОВНАЯ**, канд. техн. наук, вед. науч. сотрудник,  
ДонНУ, Донецк

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ В ПАТОЛОГИЧЕСКИ ИСКРИВЛЕННЫХ СОСУДАХ**

Проведено математическое моделирование течения крови в патологически искривленных сосудах. Исследовано влияние степени кривизны сосудов на интенсивность и особенности вторичного и возвратных течений крови в сосудах в различные моменты времени кардиального цикла. Определены потери давления для разной степени патологического искривления сосудов.

**Ключевые слова:** биогидродинамика, гемодинамика, течение в сосудах, кардиальный цикл, вихревая структура.

**Введение.** Развитие методов и возможностей сердечнососудистой хирургии в настоящее время требует детального изучения течения крови в магистральных кровеносных сосудах человека в норме и при патологии.

Основные исследования по биогидродинамики кровеносных сосудов человека посвящены вопросам гемодинамики. Вместе с тем известно, что особенности механического поведения и формы сосудистой стенки могут иметь значение для запуска начала процесса атеросклероза.

Прямое экспериментальное исследование пораженных сосудов весьма затруднительно. В связи с этим возникает необходимость совершенствования методов компьютерного моделирования течения крови на основе *CFD технологий* и последующего уточнения этих моделей на основе экспериментальных данных.

Слабо изучены эффекты влияния формы кровеносных сосудов на возникновение вторичных течений и их эволюцию. Также отсутствуют оценки напряженно-деформированного состояния стенки сонной артерии при наличии геометрической извитости, атероматозной бляшки.

**Целью работы** является исследование влияния степени искривленности участка кровеносного сосуда на гидродинамику течения крови в магистральных артериях и определения потерь давления в зависимости от характера искривленности кровеносного сосуда.

**Анализ последних исследований.** В настоящее время многочисленные работы посвящены исследованию влияния степени кривизны, *чисел Рейнольдса*, *Дина* и *Вомерсли* на особенности течения крови в искривленных сосудах [1-7]. Наиболее значительные отклонения от течения в цилиндрических трубах возникают из-за сильной искривленности сосуда, несимметричности геометрической формы, коничности кровеносных сосудов и их ветвлений. Эффекты, обусловленные этими факторами, приводят к атеросклеротическому поражению кровеносных сосудов. В частности, *Папахарилу* и др.

[8] исследовал влияние трехмерной кривизны на возникновение спиралевидного течения и формирование течения Дина. Майерс и др. [9] обнаружили вторичное течение, похожее на течение Дина в правой коронарной артерии; характер и особенности этого течения оказались в значительной степени чувствительны к локальной кривизне сосуда. Экспериментальное исследование Наруса и др. [10] продемонстрировало значительное влияние кривизны кровеносного сосуда на интенсивность и особенности возвратного течения во время диастолы.

В некоторых работах также учитывают деформацию сосудистой стенки в рамках линейной теории упругости, например [11]. Повышенный интерес к гемодинамике объясняется установлением зон образования вихрей и обратных течений, а также развиваемой в последнее время теорией повреждения сосудистой стенки [12], которая говорит о повышенной вероятности развития как атеросклеротического процесса на участках кровеносного сосуда, где наблюдаются пониженное значение касательных напряжений в потоке крови, так и аневризмы сосудистой стенки.

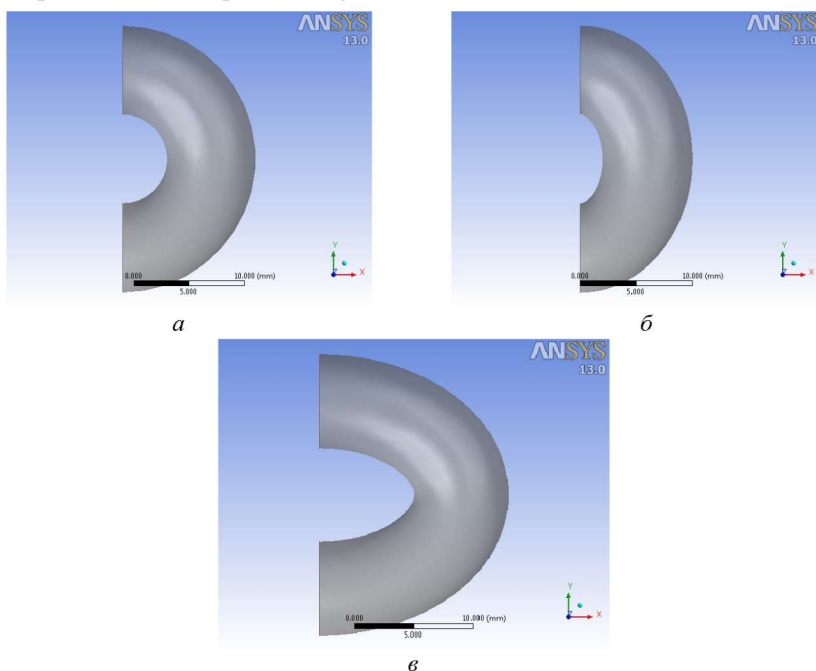


Рис. 1 – Ассоциация моделей с различными типами патологических искривлений феморальной артерии: *а* – VMH; *б* – VEH; *в* – HNV.

В данной работе методами компьютерного моделирования были исследованы три типа криволинейных каналов, показанных на рис. 1. Эти модели могут быть ассоциированы с различным типами патологических искривлений феморальной артерии: 1) *VMH-модель*: слабая степень кривизны (вертикальный радиус больше горизонтального); 2) *VEH-модель*: средняя сте-

пень кривизны (вертикальный радиус равен горизонтальному); 3) *HMV-модель*: значительная степень кривизны (горизонтальный радиус больше вертикального). Искривленная часть артерии имеет вид эллиптического тора. Два цилиндрических участка, не представленных на рис. 1, были добавлены к входу и выходу искривленной части артерии для стабилизации течения и уменьшения граничных эффектов. Геометрические особенности этих моделей оказывают значительное влияние на структуру течения.

Для VMH модели число Рейнольдса равно  $Re = 440$  ( $Re = \rho V D / \mu$ ,  $V = 0,155$  м/с – максимальная скорость,  $D = 8 \times 10^{-3}$  м – диаметр сосуда), а число Дина является переменной величиной ( $De = 4 Re \sqrt{D/R_c}$ , где  $R_c$  – радиус искривления) с границами изменения от 2613 до 1522, что соответствует углам от 0 до 90 градусов и от 1522 до 2613, что соответствует углам от 90 до 180 градусов. Более того, число Дина уменьшается в первой части полутора и увеличивается во второй. Для VEN модели число Рейнольдса равно  $Re = 440$ , а число Дина постоянно,  $De = 1760$ .

Для HNV модели число Рейнольдса равно  $Re = 440$ , а число Дина переменное с границами изменения от 1173 до 2115, что соответствует углам от 0 до 90 градусов и от 2115 до 1173, что соответствует углам от 90 до 180 градусов. Тенденция изменения числа Дина для этой модели обратна VEN-модели.

**Условия моделирования гемодинамики.** Задача решалась в нестационарной трехмерной постановке, упругость стенок сосудов не учитывалась. Кровь считалась *ньютоновской жидкостью* с плотностью  $1060 \text{ кг/м}^3$  и динамической вязкостью  $3 \times 10^{-3}$  Па·с. Данные допущения не являются строго соответствующими физиологическим условиям, но для крупных кровеносных сосудов результаты расчетов качественно соответствуют особенностям течений в живом организме. Для моделирования нестационарного ламинарного течения использовалось решение полной системы *уравнений Навье-Стокса*, полученное с помощью неявной разностной схемы в пакете ANSYS. Давление определялось по стандартной схеме; для определения скоростей использовалась схема с разностями (против потока) первого порядка, направленными против потока. Что касается взаимосвязи между расчетами скоростей и давления, то для моделирования была использована схема SIMPLE. Временной шаг постоянный и равный 10 мс.

**Граничные условия.** Как предложил *А. Редаэлли* [13] на входной границе расчетной области был использован плоский профиль скорости, соответствующий объемному кровотоку в феморальной артерии. На выходе расчетной области задавалось фоновое давление, равное 0 Па. Кроме того, для корректного моделирования возвратного течения был использован *метод коррекции по ближайшим ячейкам*. На стенках сосуда задавались условия прилипания и непротекания.

**Деформация поля скорости.** Сложность расчета течения в изогнутом

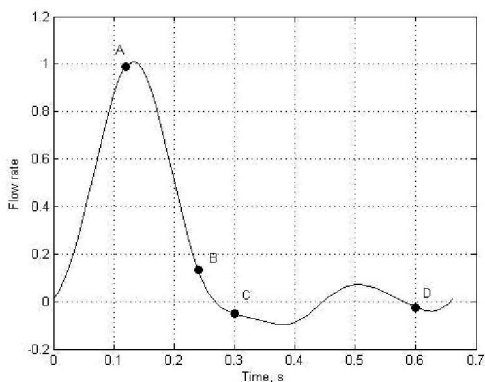


Рис. 2 – Зависимость безразмерного расхода от времени:  $A - 0,12$  с,  $B - 0,24$  с,  $C - 0,30$  с,  $D - 0,60$  с.

диент давления, действующий на все жидкие частицы, распределен почти однородно, а вследствие прилипания скорость частиц вблизи стенки много меньше, чем в ядре потока. Поэтому радиус кривизны траектории частицы в ядре должен быть больше, чем у стенки. Иными словами, жидкость из ядра вытесняется к внешней стороне изгиба, а жидкость у боковой части стенки возвращается к внутренней стороне. Таким образом, порождается вторичное замкнутое течение. Это вторичное течение в свою очередь влияет на распределение продольной скорости, и между ними возникает взаимодействие сложной природы.

В данной работе приведены результаты расчета гемодинамики в различные моменты кардиального цикла. Точка  $A$  соответствует поздней фазе систолы,  $B$  – середине диастолы,  $C$  – максимальному отрицательному расходу диастолы,  $D$  – поздней диастолы (рис. 2).

Для всех типов кривизны максимальная скорость возрастает по сравнению со скоростью, рассчитанной из расхода на входе в расчетную область, и смещается к внутренней стенке канала. Увеличение составляет около 45% для VMH-модели, 33% для VEN-модели и 27% для HNV-модели. Положение максимума скорости смещается в нормальном направлении к центральной линии канала на расстоянии около 82% для VMH-модели, 40% для VEN-модели 30% для HNV-модели. Гидродинамика в направлении вниз по потоку имеет большие различия для разных типов кривизны: для VMH-модели распределение скоростей имеет более симметричный вид, для VEN-модели увеличение скорости сначала асимметрично и после  $\frac{1}{4}$  длины (или угла  $45^\circ$ ) трубы меняется на симметричную форму, для HNV-модели асимметрия распределения скорости проявляется почти в середине (при угле  $90^\circ$ ) трубы. В случае отрицательного расхода наблюдается рост интенсивности вторичного течения для всех моделей, но HNV-модель характеризуется зоной с минимальным возвратным течением в центральной части. В случае отрицательного расхода максимальная интенсивность возвратного течения для всех моделей наблюдаются на внутренней стенке. В заключительной

канале обусловлена тем, что движение не может происходить всюду параллельно искривленной оси, и должны быть поперечные (вторичные) составляющие скорости. Действительно, частица жидкости, чтобы двигаться по искривленной траектории радиуса  $R$  со скоростью  $w$ , должна испытывать действие боковой силы (обеспечиваемой в потоке градиентом давления), сообщаемой частице боковое ускорение. Далее гра-

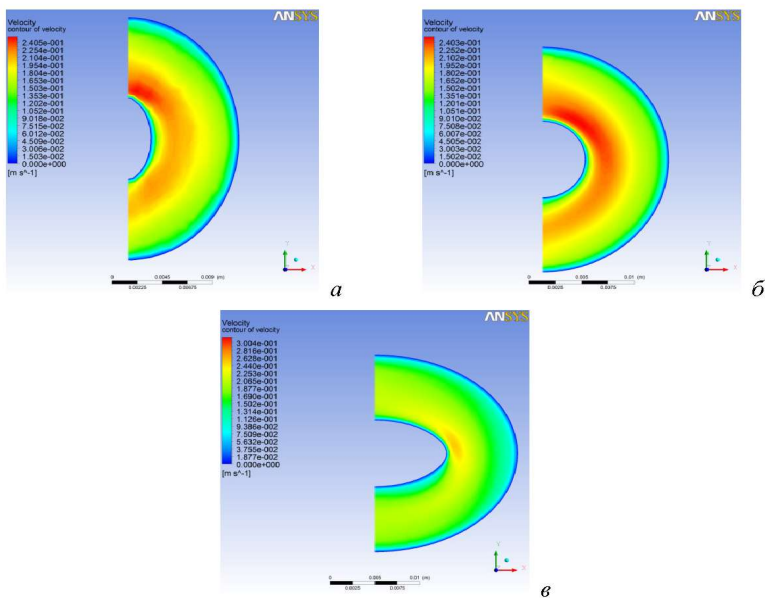


Рис. 3 – Поле скорости в искривленной части сосуда,  $t = 0, 12$  с:

a – VMH; б – VEH; в – HMV.

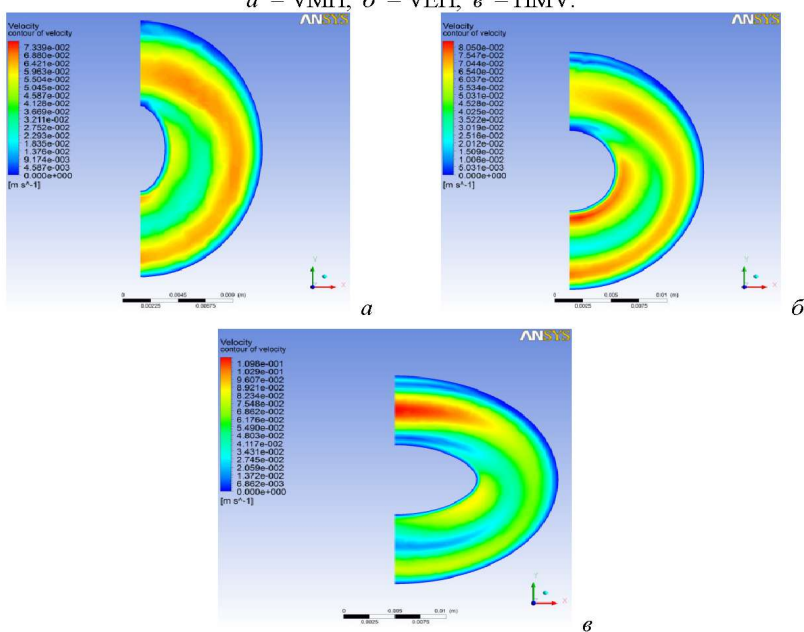


Рис. 4 – Модель поля скорости в искривленной части сосуда,  $t = 0, 24$  с:

a – VMH; б – VEH; в – HMV.

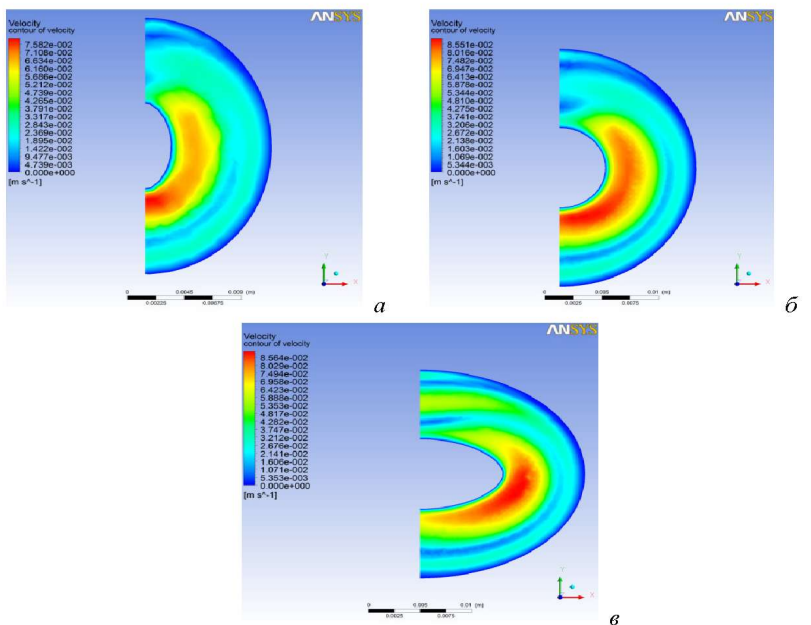


Рис. 5 – Модель поля скорости в искривленной части сосуда,  $t = 0,30$  с:  
а – VMH; б – VEH; в – HMV.

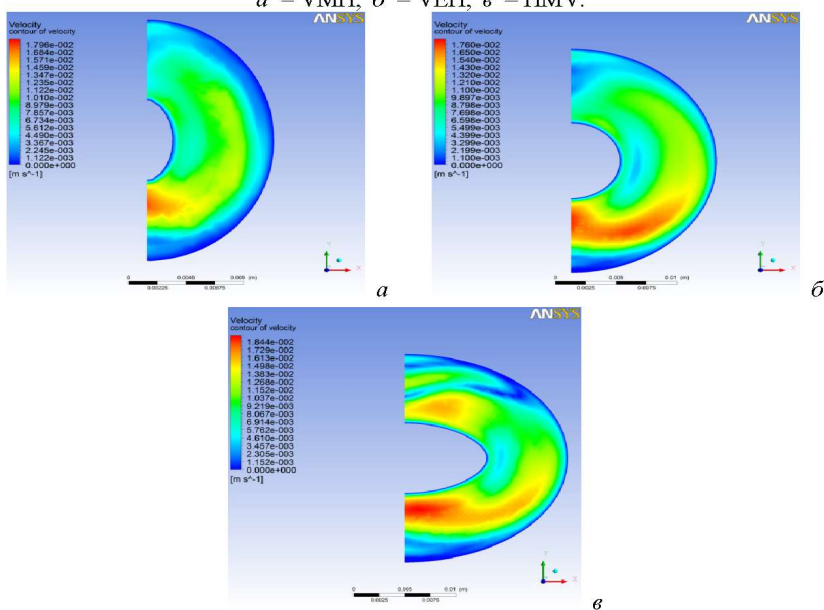


Рис. 6 – Модель поля скорости в искривленной части сосуда,  $t = 0,60$  с:  
а – VMH; б – VEH; в – HMV.

части кардиального цикла появляются хаотические изменения направлений скоростей, возможных объяснение заключается в полной дестабилизации потока в результате взаимодействия двух важнейших факторов: кривизны линий тока и пульсирующего режима течения. Данная информация представлена на рис. 3 – 6.

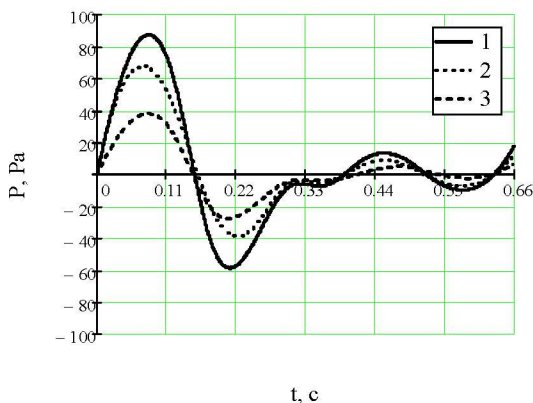


Рис. 7 – Колебания давления для VMH-модели.

ны с помощью возвратного течения, возникающего в центральной части искривленного сосуда. Таким образом, вихревая структура имеет сложную спиралевидную форму. Похожие структуры были получены для течения Дина в круговых искривлениях и течения в спиральных каналах, но векторное поле было построено только в плоскости [17]. Может быть, более похожие результаты представлены в работах [18].

В данной работе были также рассчитаны потери давления на криволинейном участке и колебания давления в начале, середине и выходе из искривления в течение кардиального цикла. Данные расчетов приведены на рис 7 – 9; (Point A – расположена на оси входного сечения (линия 1), Point B – расположена на оси в середине криволинейного участка (линия 2) и Point C – расположена на оси выходного сечения (линия 3)).

Таблица 1 – Значение потерь давления

Point A	Point B	Point C
$\Delta P_{VMH} = 128$ Па	$\Delta P_{VMH} = 92$ Па	$\Delta P_{VMH} = 57$ Па
$\Delta P_{VEH} = 143$ Па	$\Delta P_{VEH} = 103$ Па	$\Delta P_{VEH} = 69$ Па
$\Delta P_{HMH} = 165$ Па	$\Delta P_{HMH} = 110$ Па	$\Delta P_{HMH} = 59$ Па



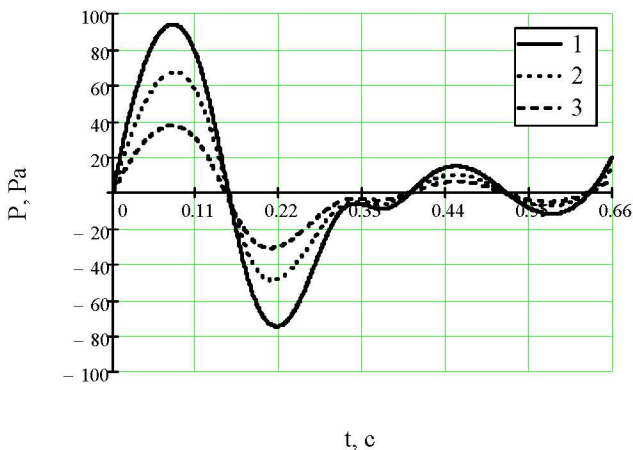


Рис.8 – Колебания давления для VEN – модели.

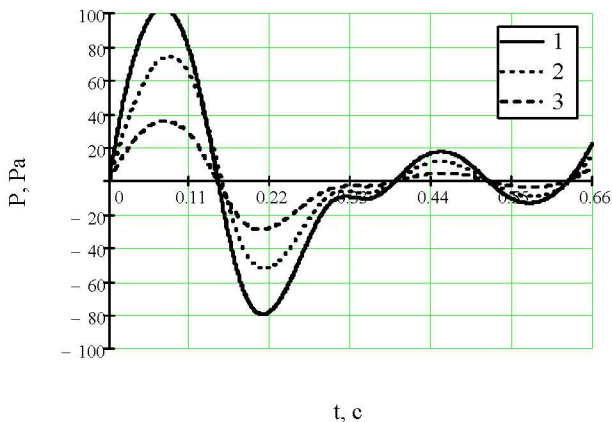


Рис. 9 – Колебания давления для HNV – модели.

Отметим, что наиболее значительные флуктуации наблюдаются во всех точках HNV-модели. Это явление может иметь следующее объяснение: данная модель имеет наибольшую степень кривизны, особенно в центральной части, и, как следствие этого, для поворота потока требуются более значительные потери давления (рис. 9).

Кроме того, были рассчитаны средние градиенты давления вдоль центральной оси потока (табл. 1):

модель VMH – 2036,2 Па/м

модель VEN – 1989,4 Па/м

модель HNV – 2986,4 Па/м



Значительное увеличение градиента давления для НМV-модели приводит к тому, что в патологически искривленных сосудах с подобной конфигурацией будет наблюдаться значительное снижение скорости кровотока и, как следствие, ухудшение снабжения тканей кислородом.

Наиболее оптимальной, с точки зрения минимизации потерь давления, выглядит конфигурация с круговой формой искривления (модель VEN).

**Выводы.** Данная работа направлена на улучшение понимания динамики потока в искривленных сосудах и исследование влияния геометрических особенностей на структуру течения. Расчеты выполнены для различных чисел Рейнольдса и Дина, в предположении, что стенки сосуда являются жесткими, и кровь ведет себя как ньютоновская жидкость. Пусть эти допущения не являются строго соответствующими физиологическим условиям, но основные аспекты динамики потоков, в том числе вихревые структуры, будут во многом соответствовать реальным данным в крупных сосудах даже при этих допущениях.

Вторичные потоки играют важную роль в гидродинамике крови, поскольку они представляют собой отклонение потока от идеализированных моделей, в частности, течения *Хагена-Пуазейля*. Наиболее значительными вторичными течениями являются *пространственные вихри Дина* в тормозной фазе периода пульсаций, которые формируют сложную трехмерную вихревую структуру в изогнутых каналах. Результаты исследования показали, что наиболее значительное влияние геометрических особенностей на вторичные течения наблюдается в модели с постоянным числом Дина. Поскольку эта модель (VEN-модель) имеет минимальные потери давления, то это свидетельствует о стабилизирующей роли вихрей Дина на гидродинамике потока в изогнутых сосудах.

В заключение отметим, что число Дина не полностью описывает поток в сильноизогнутом канале. К тому же числа Дина, которые были рассчитаны по внутреннему радиусу, центральному радиусу и внешнему радиусу, имеют широкий диапазон изменения.

**Список літератури:** 1. *Shahcheraghi, N., Dwyer, H. A., Cheer, A. Y., Barakat, A. I., and Rutaganira, T.*, 2002, "Unsteady and Three-Dimensional Simulation of Blood Flow in the Human Aortic Arch," *J. Biomech. Eng.*, 124, pp. 378–387. 2. *Pedley, T. J.*, 1980, *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, Chap. 4. 3. *Talbot, L., and Gong, K. O.*, 1983, "Pulsatile Entrance Flow in a Curved Pipe," *J. Fluid Mech.*, 127, pp. 1–25. 4. *Yearwood, T. L., and Chandran, K. B.*, 1984, "Physiological Pulsatile Flow Experiments in a Model of the Human Aortic Arch," *J. Biomech.*, 159, pp. 683–704. 5. *Chandran, K. B., and Yearwood, T. L.*, 1981, "Experimental Study of Physiological Pulsatile Flow in a Curved Tube," *J. Fluid Mech.*, 111, pp. 59–85. 6. *Chandran, K. B.*, 1993, "Flow Dynamics in the Human Aorta," *J. Biomech. Eng.*, 115, pp. 611–616. 7. *Tortoli, P., Bambi, G., Guidi, F., and Muchada, R.*, 2002, "Toward a Better Quantitative Measurement of Aortic Flow," *Ultrason. Med. Biol.*, 282, pp. 249–257. 8. *Papaharilaou, Y., Doorly, D. J., and Sherwin, S. J.*, 2002, "The Influence of Out-of-Plane Geometry on Pulsatile Flow within a Distal End-to-Side Anastomosis," *J. Biomech.*, 35, pp. 1225–1239. 9. *Myers, J. G., Moore, J. A., Ojha, M., Johnston, K. W., and Ethier, C. R.*, 2001, "Factors Influencing Blood Flow Patterns in the Human Right Coronary Artery," *Ann. Biomed. Eng.*, 29, pp. 109–120. 10. *Naruse, T., and Tanishita, K.*, 1996, "Large Curvature Effect on Pulsatile Entrance Flow in a Curved Tube: Model Experiment Simulating Blood Flow in an Aortic Arch," *J. Biomech. Eng.*, 118, pp. 180–186. 11. *Красавин В.А., Дружинин С.О., Суслов И.И., Морозов К.М., Кузьмин В.А.* Концепция системных нарушений иммунитета в генезе аномалий ветвей дуги аорты // Региональное кровообращение и микроциркуляция. – 2007. – № 1(21). – С. 81–83. 12. *Павлова О.Е., Иванов Д.В., Грамакова А.А., Морозов К.М., Суслов И.И.* Гемодинамика и механическое поведение бифуркации сонной артерии с патологической извитостью // Известия Са-

ратовского университета. Новая серия. – 2010. – Т. 10. – Серия: Математика. Механика. Информатика. – Вып. 2. – С. 66–73. **13.** *Redaelli A.* Course notes; **14.** *Womersley, J.R.* Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. From the Department of Physiology, St Bartholomew's Hospital Medical College, London, E.C. 1; **15.** *J.H. Siggers and S.L. Waters.* Unsteady flows in pipes with finite curvature J. Fluid Mech. (2008), vol. 600, pp. 133–165; **16.** *S.A. Berger, L. Talbot, L.-S. Yao.* Flow in curved pipes. Ann. Rev. Fluid Mech. 1–83. 15:461–512 **17.** *David Gammack and Peter E. Hydon.* Flow in pipes with non-uniform curvature and torsion. J. Fluid Mech. (2001), vol. 433, pp. 357–382; **18.** *Denis Doorly and Spencer Sherwin.* Flow dynamics within model distal arterial bypass grafts. Biomedical flow group, Department of Aeronautics, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, UK; **19.** *J.F. Gulich.* Centrifugal pumps. Second edition ANSYS Help.

Поступила в редколлегию 28.02.2013

---

УДК 532.522:621.372

**Моделирование течения крови в патологически искривлённых сосудах / В. С. Оверко, М. В. Бескровная** // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2013. – №5 (979). – С. 211–220. Бібліогр.: 19 назв.

Проведено математичне моделювання течії крові у патологічно змінених судинах. Досліджено вплив ступеню викривленості на інтенсивність та особливості вторинної та зворотної течії крові в судинах у різні моменти часу кардіального циклу. Визначені втрати тиску для різного ступеня патологічного скривлення судин.

**Ключові слова:** біогідродинаміка, гемодинаміка, течія в судинах, кардіальний цикл, вихрова структура.

Mathematical simulation of the blood flow in the pathologically curved blood vessels was performed. Influence of degrees of the curvature by the intensity and the features of the secondary and the reverse blood flow in the vessels at different times cardiac cycle was determined. The loss pressure for different level of the pathological curvature was defined.

**Key words:** biohydrodynamika, hemodynamics, flow in the vessels, cardiac cycle, the vortex structure.

УДК 531.3

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р. физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;  
**С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПИ»

## **ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА В ЗАДАЧЕ БАЛЛИСТИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

Показано, что применение функции Ламберта и её таблиц существенно упрощает расчёт дальности полёта и других параметров траектории при движении материальной точки в газовой среде с линейным сопротивлением.

**Ключевые слова:** материальная точка, сопротивление среды, дальность полёта, функция Ламберта.

**Введение.** Задача о движении материальной точки в среде с линейным сопротивлением относится к классическим и её решение традиционно излагают в учебниках по теоретической механике. Уравнение траектории точки в декартовой системе координат  $xOy$  обычно подают в параметрической форме:

$x = x(t); y = y(t)$ , содержащей параметр –  $t$ , или записывают в явной форме